

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $\langle\langle 1 - 1 \rangle\rangle$.

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης f , η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση ως προς x .

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ τότε υπάρχουν πάντα τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 .

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε κατ' ανάγκη $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$.

ε) Για κάθε $x < 0$ ισχύει $(\ln|x|)' = -\frac{1}{x}$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{\alpha x + 1}$, $x > -\frac{1}{\alpha}$ με $\alpha \neq 0$ για την οποία η κλίση της γραφικής της παράστασης στο σημείο με τετμημένη $x = 0$ είναι ίση με 2.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της είναι

$$f^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}, x < 1.$$

Μονάδες 8

B3. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1} \circ f^{-1}$ και έχει τύπο

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = -\frac{1}{x}, x < 0.$$

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(e^x)$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sin^2 x}{x^2}, & x < 0 \\ \lambda x^3 + x + \frac{3}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$ με $\lambda \neq 0$

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - \frac{1}{2}$ να εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 7

➤ Για την τιμή $\lambda = 1$.

Γ3. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{x^3} \right]$

Μονάδες 5

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(0) > 0$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 2(\sin x) \cdot f(x) = 3 + \eta\mu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 7

➤ Αν $f(x) = \sin x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ τότε

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = -2\eta\mu x.$$

Μονάδες 6

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln f(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της φ τέμνει την ευθεία $y=1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιος ώστε $f^2(\xi) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$.

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία και Καλή Χρονιά